



TITLE:

On Shioda's problem about Jacobi sums

AUTHOR(S):

三木, 博雄

CITATION:

三木, 博雄. On Shioda's problem about Jacobi sums. 数理解析研究所講
究録 1995, 925: 117-119

ISSUE DATE:

1995-10

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/59801>

RIGHT:

On Shioda's problem about Jacobi sums

京都工繊大 三木 博雄 (Hiroo Miki)

本講演では、ヤコビの和 $J_\ell^{(a)}(p)$ に関する塩田徹治氏の問題 ([5, 問題 3.4]) の ℓ -部分および Gouvêa - Yui [1] の予想 (1.9) に肯定的解決を与えた講演者による最近の結果 ([4]) が報告された。詳細については、文献 [4] を見られたい。

ℓ を 5 以上の任意の素数, ζ_ℓ を複素数体 \mathbb{C} 内の 1 の原始 ℓ 乗根, \mathbb{Q} を有理数体, \mathbb{Z} を有理整数環とし, $\mathbb{k} = \mathbb{Q}(\zeta_\ell)$ とおく。任意の自然数 r , 任意の $a = (a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{Z}^r$, および ℓ と素な \mathbb{k} の任意の素イデアル \mathfrak{p} に対して,

$$J_\ell^{(a)}(\mathfrak{p}) = (-1)^{r+1} \sum_{\substack{x_1, \dots, x_r \in \mathbb{F}_\mathfrak{p} \\ x_1 + \dots + x_r = -1}} \chi_\mathfrak{p}^{a_1}(x_1) \cdots \chi_\mathfrak{p}^{a_r}(x_r) \in \mathbb{Z}[\zeta_\ell]$$

は、ヤコビの和とよばれている。但し, $\mathbb{F}_\mathfrak{p} = \mathbb{Z}[\zeta_\ell]/\mathfrak{p}$, $f = N\mathfrak{p} = \#(\mathbb{F}_\mathfrak{p})$ と, $\chi_\mathfrak{p}(x) = \left(\frac{x}{f}\right)_\ell$ は \mathbb{k} における ℓ 中剰余記号である。すなわち, $x \in \mathbb{Z}[\zeta_\ell]$, $x \notin \mathfrak{p}$ なる x については,

$\chi_p(x \bmod p)$ は,

$$\chi_p(x \bmod p) \equiv x^{(Np-1)/l} \pmod{p}$$

をみたす \mathbb{C} 内の唯一つの l の l 乗根であり, $\chi_p(0) = 0$ である。

r が 3 以上の奇数で, すべての i ($0 \leq i \leq r$) について, $a_i \not\equiv 0 \pmod{l}$ (但し, $a_0 = -\sum_{i=1}^r a_i$) ならば, 文献 [5, 系 3.3] により,

$$N_{\mathbb{K}/\mathbb{Q}}(1 - J_l^{(a)}(p) \zeta^{- (r-1)/2}) = B l^3 / \zeta^w$$

とかける。ここに, $N_{\mathbb{K}/\mathbb{Q}}$ は \mathbb{K} から \mathbb{Q} へのノルム写像, B は非負有理整数で, w は [5] の (2.8) で定義された非負整数である。

塩田の問題 ([5, 問題 3.4])。 B は平方数か?

Zagier [7] ([5, 例 3.5] および [6, 例 5.15.1] 参照) は, 計算機によって, $l < 20$ および $p < 500$, $p \equiv 1 \pmod{l}$ の場合に, これを確かめた (ここに p は p 内の素数)。塩田 [5, 定理 7.1] は, $r=3$ のとき, $2, l, p$ 以外の素数では B が平方数であること (すなわち, B を素因子分解したとき, $2, l, p$ と素な部分は平方数である) を証明し, 諏訪-由井 [6, 系 5.14.1] は, $r=3$ のとき, ある条件のもとで, p において B が平方数であることを証明した。

本講演では, 任意の奇数 $r (\geq 3)$ について, B の l -部分

が平方数であることを証明した [4] について報告した。

文 献

- [1] F. Gouvêa and N. Yui, Arithmetic of diagonal hypersurfaces over finite fields, London Math. Soc. Lecture Notes Series 209, Cambridge Univ. Press, 1995.
- [2] H. Miki, On the l -adic expansion of certain Gauss sums and its applications, Advanced Studies in Pure Math. 12 (1987), pp. 87-118.
- [3] H. Miki, On Shioda's problem about Jacobi sums, Acta Arith. 69 (1995), pp. 107-112.
- [4] H. Miki, On Shioda's problem about Jacobi sums II, to appear in Acta Arith.
- [5] T. Shioda, Some observations on Jacobi sums, Advanced Studies in Pure Math. 12 (1987), 119-135.
- [6] N. Suwa and N. Yui, Arithmetic of certain algebraic surfaces over finite fields, in: Lecture Notes in Math. 1383, Springer, Berlin, 1989, pp. 186-256.
- [7] D. Zagier, Numerical data, March 1983 (see [6], Examples 5.15.1).